



Recebido: 11/03/2024 | Revisado: 03/06/2024 | Aceito: 02/07/2024 | Publicado: 16/09/2024



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 Unported License.

DOI: 10.31416/rsdv.v12i3.997

## Modelos matemáticos de estimativa do fator de atrito da equação de Darcy-Weisbach para fluxo turbulento liso

*Mathematical models for estimating the friction factor of the Darcy-Weisbach equation for smooth turbulent flow*

SOUZA, Vanderlan Fernandes. Bacharelado em Agronomia

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano - Campus Petrolina Zona Rural. PE 647, Km 22, PISNC N - 4, Zona Rural - Petrolina - Pernambuco - Brasil. CEP: 56302-970 / Telefone: (87) 2101-8050 / E-mail: [vanderlan.fernandes@aluno.ifsertao-pe.edu.br](mailto:vanderlan.fernandes@aluno.ifsertao-pe.edu.br)

SOUZA, José Sebastião Costa de. Doutor em Engenharia Agrícola

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano - Campus Petrolina Zona Rural. PE 647, Km 22, PISNC N - 4, Zona Rural - Petrolina - Pernambuco - Brasil. CEP: 56302-970 / Telefone: (87) 2101-8050 / E-mail: [sebastiao.costa@ifsertao-pe.edu.br](mailto:sebastiao.costa@ifsertao-pe.edu.br)

TAVARES FILHO, Gilberto Saraiva. Mestre em Engenharia Agrícola

Universidade Federal do Vale do São Francisco - Campus de Juazeiro. Av. Antônio C. Magalhães, 510 - Juazeiro - Bahia. CEP: 48902-300 / Telefone: (74) 2101 7608 / E-mail: [gilfilho753@hotmail.com](mailto:gilfilho753@hotmail.com)

MORAIS, Valdomiro Andrade Mota de. Especialista em Desenvolvimento de Jogos Digitais

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano - Campus Petrolina Zona Rural. PE 647, Km 22, PISNC N - 4, Zona Rural - Petrolina - Pernambuco - Brasil. CEP: 56302-970 / Telefone: (87) 2101-8050 / E-mail: [valdomiro.morais@ifsertao-pe.edu.br](mailto:valdomiro.morais@ifsertao-pe.edu.br)

GARRIDO, Marlon da Silva. Doutor em Tecnologias Energéticas Nucleares

Universidade Federal do Vale do São Francisco - Campus de Juazeiro. Av. Antônio C. Magalhães, 510 - Juazeiro - Bahia. CEP: 48902-300 / Telefone: (74) 3614 1934 / E-mail: [garridoms.univasf@gmail.com](mailto:garridoms.univasf@gmail.com)

### RESUMO

O fator de atrito de equação universal de perda de carga é o maior complicador para o seu uso, pois demanda equações particulares para cada regime de fluxo e em alguns casos processos iterativos na resolução. Diversos autores propuseram expressões simplificadas para contornar tais dificuldades, contudo, ainda existe a necessidade de comprovações para casos específicos. Diante disto, buscou-se com este trabalho avaliar a exatidão das equações de Colebrook-White, Moody, Swamee, Swamee-Jain e Sousa e Dantas Neto em comparação a equação de Von Kármán na determinação do fator de atrito de Darcy-Weisbach para o regime de fluxo turbulento liso, nas condições mais recorrentes de projetos hidráulicos atuais. Constatou-se que para o regime de fluxo turbulento liso a equação de Moody foi a de menor exatidão, as equações de Colebrook-White, Swamee e Swamee-Jain foram equivalentes entre si e a equação de Sousa e Dantas Neto foi a de melhor performance quando comparada a equação de Von Kármán para o fluxo turbulento liso nos 675 cenários analisados, que corresponderam a velocidades de fluxo de até 4,00 m s<sup>-1</sup>, diâmetros nominais de até 500 mm e rugosidades absolutas de 0,0001 a 0,0100 mm.

**Palavras-chave:** Colebrook-White, Moody, Swamee, Swamee-Jain, Sousa e Dantas Neto

### ABSTRACT

The friction factor of the universal head loss equation is the main complicating factor for its use, as it requires specific equations for each flow regime and, in some cases, iterative processes for resolution. Several authors have proposed simplified expressions to overcome such difficulties; however, there is still a need for validation in specific cases. Therefore, this study aimed to evaluate





the accuracy of the Colebrook-White, Moody, Swamee, Swamee-Jain, and Sousa and Dantas Neto equations compared to the Von Kármán equation in determining the Darcy-Weisbach friction factor for smooth turbulent flow, under the most common conditions in current hydraulic projects. It was found that for smooth turbulent flow, the Moody equation was the least accurate, the Colebrook-White, Swamee, and Swamee-Jain equations were equivalent, and the Sousa and Dantas Neto equation performed best compared to the Von Kármán equation for smooth turbulent flow in the 675 scenarios analyzed, which corresponded to flow velocities of up to  $4.00 \text{ m s}^{-1}$ , nominal diameters of up to 500 mm, and absolute roughness ranging from 0.0001 to 0.0100 mm.

**keywords:** Colebrook-White, Moody, Swamee, Swamee-Jain, Sousa and Dantas Neto

## Introdução

Para o dimensionamento hidráulico de sistemas de condução de água, ou um fluido real qualquer, é necessário quantificar, a partir de cálculos que envolvam a conservação da massa e da energia, a magnitude do escoamento e as pressões do fluido em pontos estratégicos dos condutos (Silva e Tolentino Júnior, 2020; Jardim et al, 2022).

No processo de escoamento destes fluidos, reais, ocorrerá conversão irreversível de parte da sua carga de energia em calor. A esta parcela perdida se emprega usualmente o termo de perda de carga (Azevedo Netto et al., 2015; Haddad, 2019).

Uma série de modelos matemáticos foram desenvolvidos para estimativa da perda de carga em tubulações, dentre eles tem-se a equação universal de perda de carga ou equação de Darcy-Weisbach, que é tida como a expressão mais genérica e exata dentre os demais modelos, podendo ser usada para múltiplos fluidos (líquidos e gases), para quaisquer condições térmicas, formas geométricas das seções de fluxos e materiais dos condutos (Abdulameer et al., 2022).

Apesar da hegemônica performance da equação de Darcy-Weisbach, a determinação de uma de suas variáveis, o fator de atrito ( $f$ ), ainda a torna seu uso limitado, tanto para cálculos manuais quanto computacionais, por envolver equações implícitas para os regimes de fluxo turbulento liso e transitório. Com predomínio da turbulência hidraulicamente lisa, condicionada especialmente pela lisura dos tubos comerciais da atualidade (Jamil e Mujeebu, 2019).

Embora seja comum o emprego indiscriminado da equação de Colebrook-White para todo o regime de fluxo turbulento, Porto (2006), Sousa e Dantas Neto (2014) e Azevedo Netto et al. (2015) dentre outros, recomendam as equações de Von Kármán, Colebrook-White e Nikuradse para a determinação do fator  $f$  nos respectivos regimes de fluxo turbulento hidraulicamente, liso, transitório e rugoso. Ou seja, dever-se-ia existir dominância da equação de Von Kármán nos dimensionamentos hidráulicos dos projetos de condução de água com tubos novos ou pouco usados.

Como as equações de Von Kármán e de Colebrook-White são implícitas para o fator  $f$ , diversas equações aproximadas foram apresentadas para estimativa deste fator explicitamente, dentre elas estão as equações de Moody, Swamee, Swamee-Jain e Sousa e Dantas Neto (2014). E como não existe um estudo avaliativo que abranja tais equações em conjunto, este se constituiu no objeto deste trabalho.

## Material e métodos





O estudo foi realizado a partir de rotinas de cálculos em planilhas eletrônicas do Microsoft Excel® 2019, simulando cenários característicos de escoamentos forçados por condutos lisos (PVC e polietileno, especialmente).

Os cenários, 675 no total, foram gerados da interação entre diferentes valores de rugosidades absolutas, velocidades de fluxo e diâmetros internos de tubulações (Tabela 1), de modo a abranger com margem as situações ordinárias de projetos hidráulicos diversos, especialmente aqueles voltados para irrigação (Gomes, 1999).

**Tabela 1** - Valores de rugosidades absolutas, velocidades de fluxo e diâmetros internos utilizados nas simulações

Rugosidade absoluta (mm)	Velocidade (m s <sup>-1</sup> )	Diâmetro interno (mm)*		
0,0100	0,40	13,0	48,1	144,0
	0,60	16,1	68,7	184,0
	1,00	20,6	72,5	193,0
	1,50	27,0	92,4	252,0
0,0010	2,00	28,8	97,6	299,8
	2,50	36,8	113,8	347,6
	3,00	32,5	120,0	394,6
	3,50	35,7	136,8	489,8
0,0001	4,00	44,9		

\*Obtidos de normas técnicas vigentes da ABNT.

Para cada cenário foi determinado o fator de atrito  $f$  da equação de Darcy-Weisbach a partir das equações da Tabela 2.

**Tabela 2** - Equações utilizadas para determinação do fator de atrito  $f$  da equação universal de perda de carga (equação de Darcy-Weisbach, eq. 1)

Autor(es)	Equação	Nº
Darcy-Weisbach	$J = \left( \frac{8}{g \cdot \pi^2} \right) \cdot f \cdot \frac{Q^2}{D_i^5}$	(1)
Von Kármán	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \cdot \log \left( \frac{2,51}{\text{Rey} \cdot \sqrt{f}} \right)$	(2)
Colebrook-White	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \cdot \log \left( \frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D_i} + \frac{2,51}{\text{Rey} \cdot \sqrt{f}} \right)$	(3)
Swamee-Jain	$f = \frac{0,25}{\left[ \log \left( \frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D_i} + \frac{5,71}{\text{Rey}^{0,9}} \right) \right]^2}$	(4)



Swamee

$$f = \left\{ \left( \frac{64}{\text{Rey}} \right) + \left[ \ln \left( \frac{\varepsilon}{3,7 \cdot \text{Di}} + \frac{5,74}{\text{Rey}^{0,9}} \right) - \left( \frac{2500}{\text{Rey}} \right)^6 \right]^{-16} \right\}^{0,125} \quad (5)$$

Moody

$$f = 0,0055 \cdot \left[ 1 + \left( 20000 \cdot \frac{\varepsilon}{\text{Di}} + \frac{10^6}{\text{Rey}} \right)^{1/3} \right] \quad (6)$$

Sousa e Dantas Neto

$$f = 0,1114 \cdot \text{Di}^{-0,2333} \cdot \text{Rey}^{-(0,1638 \cdot \text{Di}^{-0,0964})} \quad (7)$$

Em que:  $J$  - perda de carga unitária,  $\text{m m}^{-1}$ ,  $g$  - aceleração da gravidade (adotada  $9,80 \text{ m s}^{-2}$ ),  $f$  - fator de atrito de Darcy-Weisbach, adimensional,  $\text{Di}$  - Diâmetro interno,  $\text{m}$ ,  $Q$  - vazão (equação 8),  $\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $\varepsilon$  - rugosidade absoluta da tubulação,  $\text{m}$ ,  $\text{Rey}$  - número de Reynolds (equação 9), adimensional.

$$Q = \frac{\pi \cdot \text{Di}^2}{4} \cdot V \quad (8)$$

$$\text{Rey} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot \text{Di} \cdot \nu} \quad (9)$$

Em que:  $Q$  - vazão,  $\text{m}^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $\text{Di}$  - diâmetro interno,  $\text{m}$ ,  $V$  - velocidade de fluxo,  $\text{m s}^{-1}$ ,  $\nu$  - viscosidade cinemática da água (adotado  $1,00 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ).

Para resolução das equações 2 e 3, que demandam processo iterativo, utilizou-se do método numérico de Newton-Raphson.

Em seguida realizou-se a conferência do regime de fluxo a partir dos critérios estabelecidos na Tabela 3, a determinação e a classificação (Tabela 4) do desempenho estatístico das equações 3 a 7 em comparação a equação 2, através do índice de concordância de Willmott -  $d$  (equação 10), do coeficiente de correlação -  $r$  (equação 11), do índice de desempenho -  $c$  (equação 12), do erro do quadrado médio - EQM (equação 13) e do erro percentual relativo - EP (equação 14).

$$d = 1 - \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (P_i - O_i)^2}{\sum_{i=1}^n (|P_i - O_i| + |O_i - O|)^2} \right] \quad (10)$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (P_i - P)(O_i - O)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (P_i - P)^2 \cdot \sum_{i=1}^n (O_i - O)^2}} \quad (11)$$

$$c = r \cdot d \quad (12)$$

$$\text{EQM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (P_i - O_i)^2}{n}} \quad (13)$$

$$\text{EP} = \frac{(P_i - O_i)}{O_i} \cdot 100 \quad (14)$$

Em que:  $P_i$  - valores estimados,  $O_i$  - valores observados,  $P$  - média dos valores estimados,  $O$  - média dos valores observados,  $N$  - número de observações.

**Tabela 3** - Critérios apontados por Porto (2006) para classificação dos regimes de fluxo

Critérios	Regime de fluxo do escoamento
$Rey < 2000$	Laminar
$2000 \leq Rey \leq 4000$	Transitório
$Rey > 4000$ e $\left[Rey \cdot \sqrt{f} \cdot \left(\frac{\epsilon}{D_i}\right)\right] < 14,14$	Turbulento hidraulicamente liso
$Rey > 4000$ e $14,14 \leq \left[Rey \cdot \sqrt{f} \cdot \left(\frac{\epsilon}{D_i}\right)\right] \leq 198$	Turbulento hidraulicamente transitório
$Rey > 4000$ e $\left[Rey \cdot \sqrt{f} \cdot \left(\frac{\epsilon}{D_i}\right)\right] > 198$	Turbulento hidraulicamente rugoso

Em que:  $Rey$  - número de Reynolds (adimensional),  $f$  - fator de atrito de Darcy-Weisbach, adimensional,  $\epsilon$  - rugosidade absoluta do tubo, m,  $D_i$  - diâmetro interno da tubulação, m.

**Tabela 4** - Critérios indicados para classificação do índice de concordância, coeficiente de correlação e do índice de desempenho

Índice de concordância (d)	Coeficiente de correlação (r)	Índice de desempenho (c)	Classificação
0,95 - 1,00	0,95 - 1,00	0,90 - 1,00	Excelente
0,89 - 0,95	0,89 - 0,95	0,80 - 0,90	Ótimo
0,84 - 0,89	0,84 - 0,89	0,70 - 0,80	Muito bom
0,77 - 0,84	0,77 - 0,84	0,60 - 0,70	Bom
0,71 - 0,77	0,71 - 0,77	0,50 - 0,60	Moderadamente bom
0,63 - 0,71	0,63 - 0,71	0,40 - 0,50	Moderado
0,55 - 0,63	0,55 - 0,63	0,30 - 0,40	Moderadamente ruim
0,45 - 0,55	0,45 - 0,55	0,20 - 0,30	Ruim
0,32 - 0,45	0,32 - 0,45	0,10 - 0,20	Muito ruim
0,00 - 0,32	0,00 - 0,32	0,00 - 0,10	Terrível

Fonte: Silva et al. (2022)

Foi realizado também, comparação das médias por contrastes não ortogonais pelo teste de Scheffé, a 5% de probabilidade, para os erros percentuais das equações 3 a 7 em relação à equação 2. Estes testes foram executados a partir do software SISVAR 5.6 (Ferreira, 2011).

Os contrastes, tomando-se os coeficientes com o primeiro valor para a equação 3 e o último para a equação 7, foram os seguintes:

$$Y(1) = 1 + 1 + 1 + 1 - 4$$

$$Y(2) = 1 + 0 + 0 + 0 - 1$$

$$Y(3) = 0 + 1 + 0 + 0 - 1$$

$$Y(4) = 0 + 0 + 1 + 0 - 1$$

$$Y(5) = 0 + 0 + 0 + 1 - 1$$



## Resultados e discussão

Como era esperado, por conta das rugosidades absolutas adotadas para as tubulações, o regime de fluxo para todos os cenários testados foi classificado como turbulento e hidraulicamente liso, e assim as equações 2 a 7 são aplicáveis na obtenção do fator de atrito  $f$  da equação universal de perda de carga (Mello et al., 1999, Sousa e Dantas Neto, 2014).

Assim como observado por Pimenta et al. (2018), a classificação de desempenho “excelente” foi verificada para todas as equações testadas, mesmo no pior cenário (maior erro quadrado médio), como pode ser visto na Tabela 5. Nota-se, contudo, que as equações de Colebrook-White, Swamee-Jain e Moody apresentaram EQM (erro do quadrado médio) muito similares, variando de 0,0000 a 0,0020 para o melhor e o pior cenário, respectivamente, já para a equação de Sousa e Dantas Neto (2014) a variação identificada foi de 0,0001 a 0,0002 (Tabela 5 e Figuras 1a e 1b), mostrando quão exata é esta equação na determinação do fator de atrito da equação universal para o regime de fluxo turbulento e hidraulicamente liso. Além da exatidão, a equação de Sousa e Dantas Neto (2014), bem como as equações de Swamee-Jain e Moody, tem a vantagem de ser explícita para o fator  $f$ , fato que não ocorre na equação de Colebrook-White. Desta forma, se a opção for para uso da equação de Colebrook-White, que demanda tratamento iterativo para resolução, a recomendação que se faz é que em vez disso, adote-se a equação de Von-Kármán, que também demanda tal processo, mas que é indiscutivelmente a mais indicada para o regime de fluxo em questão (Porto, 2006; Sousa e Dantas Neto, 2014; Azevedo Netto et al., 2015).

**Tabela 5** - Valores do coeficiente de correlação ( $r$ ), índice de concordância ( $d$ ), índice de desempenho ( $c$ ), a classificação do índice de desempenho e do erro do quadrado médio (EQM) para o fator de atrito  $f$  de Darcy-Weisbach geradas por diversas equações em relação à Von Kármán, no melhor (menor EQM) e pior (maior EQM) cenário de desempenho de cada equação

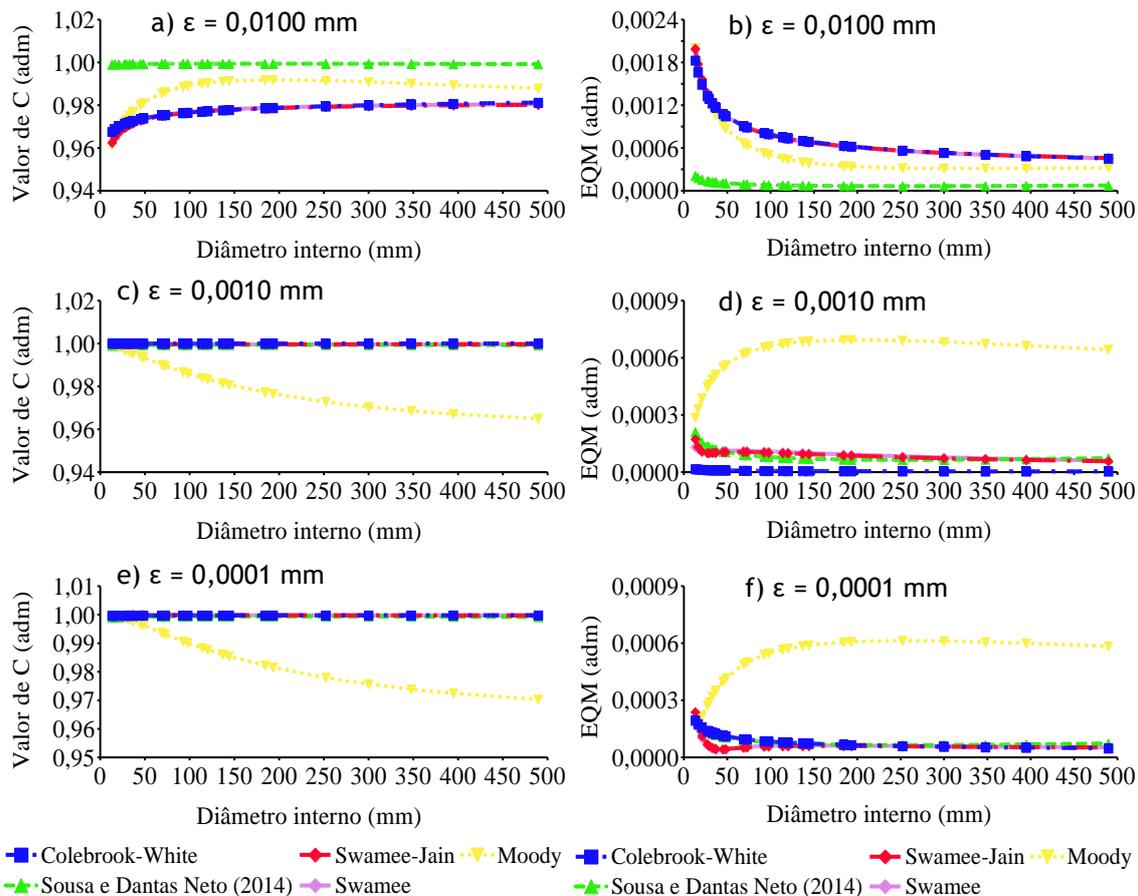
Equação	Cenário	e (mm)	Di (mm)	Índices estatísticos				EQM
				r	d	c	Classificação	
Colebrook-White	Melhor	0,0001	489,4	1,0000	1,0000	1,0000	Excelente	0,0000
	Pior	0,0100	13,0	0,9995	0,9681	0,9677	Excelente	0,0018
Swamee-Jain	Melhor	0,0010	44,9	1,0000	1,0000	0,9999	Excelente	0,0002
	Pior	0,0100	13,0	0,9992	0,9632	0,9625	Excelente	0,0020
Moody	Melhor	0,0001	13,0	1,0000	0,9997	0,9997	Excelente	0,0003
	Pior	0,0100	13,0	0,9995	0,9620	0,9615	Excelente	0,0020
Sousa e Dantas Neto (2014)	Melhor	0,0100	184,0	0,9996	0,9998	0,9994	Excelente	0,0001
	Pior	0,0100	13,0	0,9994	0,9996	0,9990	Excelente	0,0002
Swamee	Melhor	0,0010	36,8	1,0000	1,0000	0,9999	Excelente	0,0000
	Pior	0,0100	13,0	0,9994	0,9637	0,9631	Excelente	0,0020





A equação de Moody, apesar de ter recebido classificação excelente assim como as demais, foi a que apresentou os menores valores do Índice de desempenho e uma tendência de perda de exatidão com o aumento do diâmetro da tubulação (Figura 1c e 1e). Comportamento semelhante se verifica para o EQM (Figura 1d e 1f). Já para as outras equações, os erros foram muito próximos não havendo padrões de tendências. No caso da equação de Moody (equação 6) o fato é que o termo que contém a rugosidade relativa ( $20.000 \cdot \epsilon / Di$ ), é reduzido em 10 e 100 vezes quando a rugosidade cai de 0,0100 para 0,0010 e 0,0001 mm, respectivamente. E esta redução, não é contrabalanceada com a elevação no número de Reynolds, já que na referida equação o número de Reynolds é denominador de 1.000.000; logo, a elevação do diâmetro interno das tubulações tende a reduzir acentuada e desproporcionalmente o fator de atrito  $f$  na equação de Moody em comparação a equação de Von Kármán (isto é evidenciado na Figuras 6). Similarmente, Gonçalves et al. (2021) relataram perda de exatidão com o uso do diagrama de Moody na estimativa do fator  $f$ , no caso referente a leitura, em comparação ao emprego da equação de Colebrook-White. Portanto, de modo generalizado, tanto a equação quanto o diagrama de Moody constitui-se última opção entre os modelos estudados.

**Figura 1** - Valores do índice de desempenho (c) e do erro quadrado médio (EQM) para rugosidades absolutas de 0,0100, 0,0010 e 0,0001 mm



A paridade nos índices e nos coeficientes estatísticos para as equações de Colebrook-White e Swamee-Jain se dá por conta de que uma das bases para a formulação desta última ter sido a própria



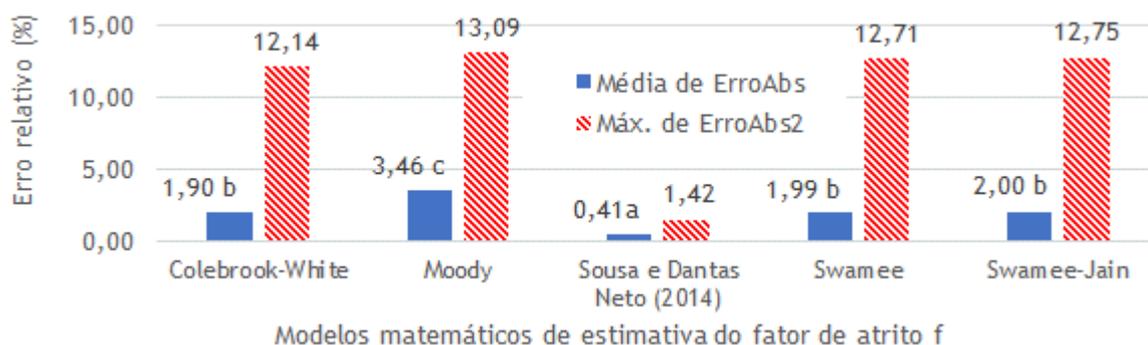


equação de Colebrook-White (Swamee-Jain, 1976), logo as tendências são as mesmas como verificado neste e nos trabalhos de Samadianfard (2012) e Pimenta (2017).

Apesar da classificação gerada para os modelos testados, ter sido excelente, notou-se que os índices de concordância e de desempenho não foram sensíveis ao diagnóstico pretendido para o estudo em descrição. Esta constatação foi feita observando-se as planilhas de cálculo que corroboraram com a análise gráfica ilustrada por Pimenta et al. (2018). Os autores verificaram erros relativos superiores a 9% para índices de desempenho de 0,98. O que significa que mesmo na melhor classificação do método os erros relativos são elevados.

Recorrendo-se, portanto, aos testes de comparação de médias pelos contrastes não ortogonais, foi identificado que o modelo matemático de Sousa e Dantas Neto (2014), apresentou a menor média dos erros percentuais relativos absolutos (equação 14 com numerador em módulo) em comparação a equação de Von Kármán; já a equação de Moody foi a pior de todas (erro médio absoluto de 3,46%) e as demais não diferiram estatisticamente entre si (Figura 2).

**Figura 2** - Erros percentuais relativos absolutos médios (com classificação de Scheffé a 5% de probabilidade) e máximos, gerados por modelos matemáticos de estimativa do fator de atrito  $f$ , em comparação a equação de Von Kármán



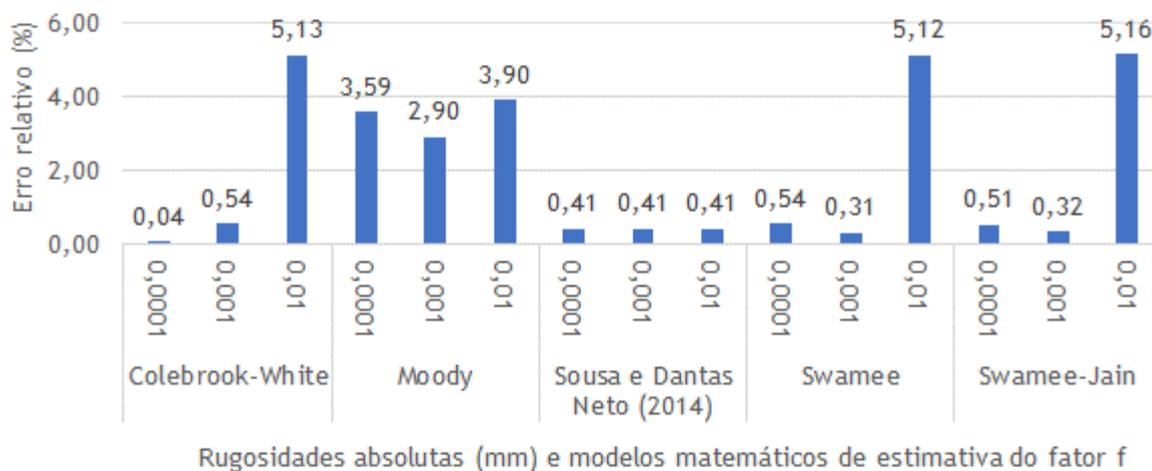
Nota-se que o erro máximo gerado pela equação de Sousa e Dantas Neto (2014) é inferior aos erros médios dos demais modelos (Figura 2). Os patamares de erros acima de 10%, ocorreram em situações extremas: diâmetros pequenos ( $< 20$  mm), velocidades elevadas ( $> 3,00$  m s<sup>-1</sup>) e rugosidade absoluta de 0,0100 mm. Erros desta magnitude para as equações de Colebrook-White, Moody, Swamee e Swamee-Jain também foram verificados, dentre outros, por Andrade e Carvalho (2001), Yoo e Singh (2010), Samadianfard (2012) e Sousa e Dantas Neto (2014).

Quando se analisa as médias dos erros gerados pelos modelos em função das rugosidades absolutas (Figura 3), notam-se tendências similares para as equações de Moody, Swamee e Swamee-Jain, tipo côncava; para Colebrook-White foi decrescente e de constância para Sousa e Dantas Neto (2014). A invariância na equação de Sousa e Dantas Neto (2014) é explicada pela ausência da variável rugosidade no modelo (assim como também inexistente na equação de Von Kármán); o decaimento do erro na equação de Colebrook-White ocorre devido a redução do valor do primeiro termo da equação com a redução da rugosidade, ficando praticamente idêntica a equação de Von Kármán para



rugosidades próximas a 0,0001 mm. E o efeito côncavo nos modelos de Moody, Swamee e Swamee-Jain ocorre por conta da rugosidade ter exponenciação quadrática ou de raiz cúbica.

**Figura 3** - Erros absolutos médios gerados por modelos matemáticos em comparação a equação de Von Kármán, para diferentes rugosidades absolutas do conduto



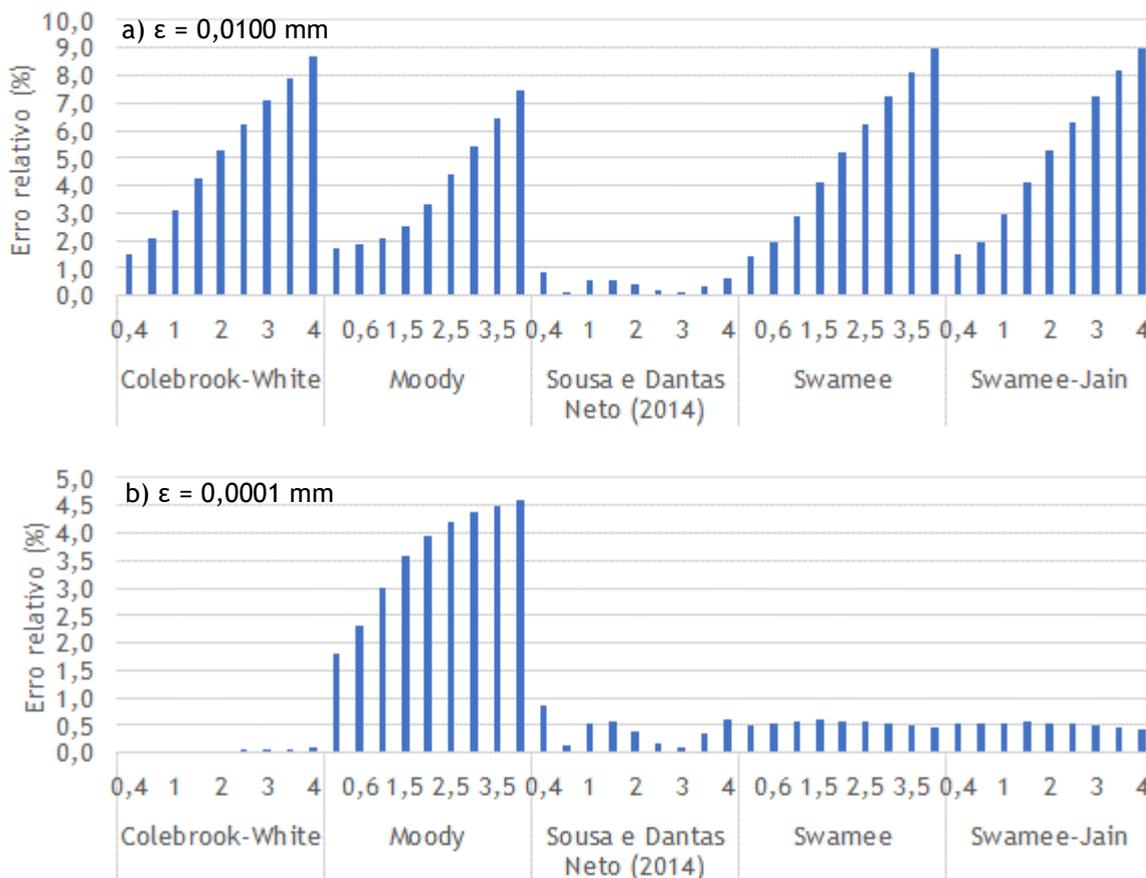
Andrade e Carvalho (2001) ao comparar a equação de Swamee-Jain com a de Von Kármán para diferentes rugosidades absolutas e velocidades de fluxo, observaram erros crescentes com a rugosidade chegando a 14,3%. Resultados estes consonantes aos da Figura 3 e aos apresentados por Sousa e Dantas Neto (2014), quando expuseram erros da equação de Swamee-Jain para mais de 20% em situações de elevadas velocidades de fluxo. Esta tendência se verifica na Figura 4a, que com exceção da equação de Sousa e Dantas Neto (2014) as demais apresentam erros crescentes com a velocidade de fluxo. Isto é um fator de extrema importância para os projetos de irrigação, já que a velocidade de fluxo é variável nos trechos das tubulações de derivação e lateral (que funcionam com escoamento não permanente ou vazão em marcha) e nas demais tubulação comumente oscilam de 1,00 a 2,50 m s<sup>-1</sup> (Gomes, 1999; Azevedo Netto et al., 2015). Nestes casos os erros médios máximos associados a equação de Sousa e Dantas Neto (2014) são da ordem de 0,5%, enquanto, para os demais modelos os erros estão acima de 4% para rugosidade absoluta de 0,0100 mm. Resultados análogos foram obtidos por Melo (2020) quando verificou que o modelo de Sousa e Dantas Neto (2014) para cenários similares aos testados neste estudo, apresentou o maior grau de exatidão em comparação com modelos consolidados na literatura.

Como se percebe na análise conjunta das Figura 4a e 4b, a elevação dos erros das equações de Colebrook-White, Swamee e Swamee-Jain em comparação a equação de Von Kármán para a variável velocidade é indireto. Examinando-se a equação de Colebrook-White, que é uma junção das equações de Nikuradse e Von Kármán (Brkić, 2011; Azevedo Netto et al., 2015), percebe-se que o aumento da velocidade não podia gerar incrementos de erro, pois a influência da velocidade também está presente na equação de Von Kármán, contudo, os erros médios chegaram a mais de 8%. O mesmo se verifica para os demais modelos que contém a variável rugosidade (Figura 4a). O que ocorre é que o termo que envolve a rugosidade e o diâmetro é preponderante ante a velocidade e por conseguinte



ao número de Reynolds; assim quanto menor for a rugosidade absoluta ou maior o diâmetro interno do conduto, menores serão os erros, fato constatado com os valores da Figura 4b. A equação de Moody, no entanto, sofre influência da raiz cúbica e do numerador da razão que envolve o número de Reynolds, fazendo com que a equação subestime o fator de atrito e gere erros, conforme observados, da ordem de 4,0% para velocidades de fluxo de 1,50 a 2,50 m s<sup>-1</sup> (isto é evidenciado na Figura 6).

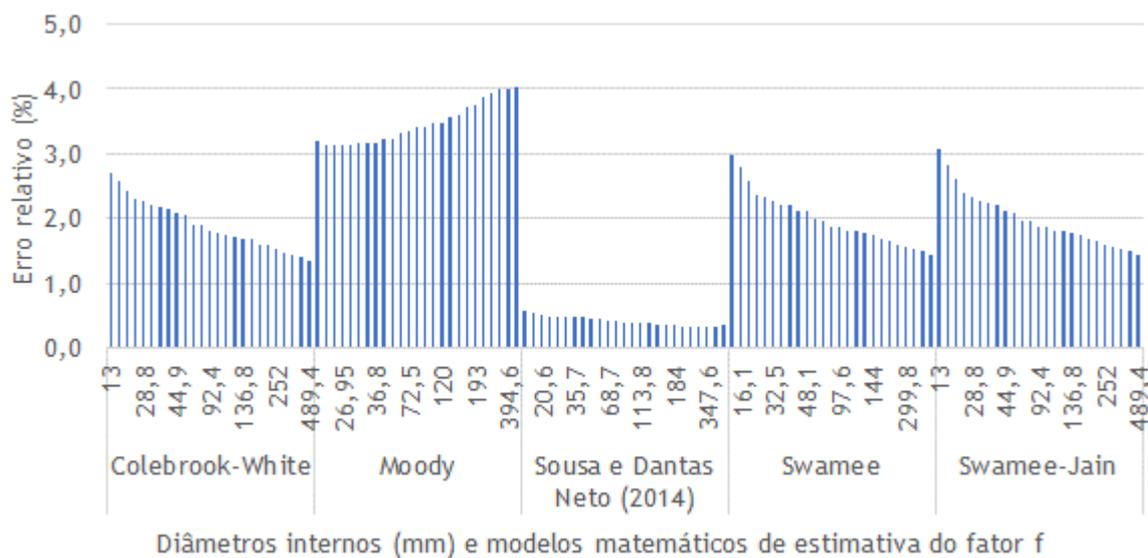
**Figura 4** - Erros absolutos gerados por modelos matemáticos em comparação a equação de Von Kármán, para diferentes velocidades e rugosidades absolutas



Para a variável diâmetro interno do conduto, Figura 5, ocorreu novamente melhores resultados para a equação de Sousa e Dantas Neto (2014). Ocorreu ainda a manutenção da tendência contrária da equação de Moody para com as demais e decaimento dos erros para as equações de Colebrook-White, Swamee e Swamee-Jain. Como já foi comentado, o aumento do diâmetro gera menores erros e isto devido ao posicionamento da variável, ou seja, como o diâmetro se encontra no denominador, estabelece-se relação inversamente proporcional com a rugosidade absoluta, assim para um valor fixo de rugosidade o aumento do diâmetro reduz o termo da equação. Portanto, para o escoamento turbulento hidráulicamente liso, quanto maior for o diâmetro interno do conduto menor será a influência da chamada rugosidade relativa no fator de atrito (Porto, 2006; Azevedo Neto, 2015; Gonçalves et al., 2021).

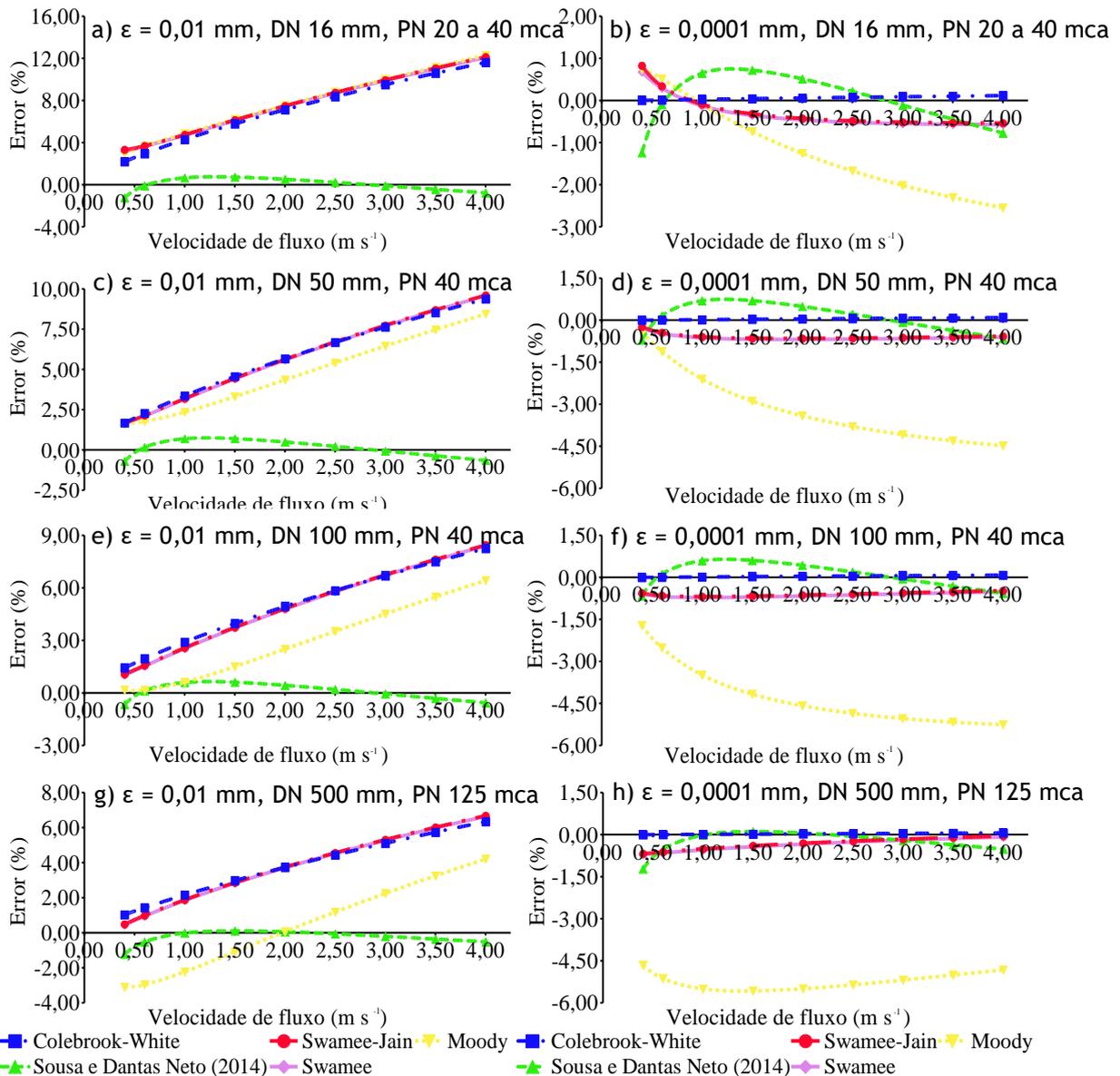


**Figura 5** - Erros absolutos médios gerados por modelos matemáticos em comparação a equação de Von Kármán, para diferentes diâmetros internos dos condutos



Na Figura 6 encontram-se ilustrados os principais cenários deste estudo. Tais ilustrações complementam os comentários já tecidos e exibem de forma direta as interações entre as fontes de variação analisadas (rugosidades absolutas, diâmetros internos de condutos e velocidades de fluxo) na acurácia das equações para os principais cenários. Por exemplo, percebe-se que as equações tendem a melhorar suas performances com a redução da rugosidade absoluta; que não há prejuízos nem ganhos de precisão ou exatidão entre as equações de Colebrook-White e Swamee-Jain, e como esta última não tem o inconveniente de implicitude do fator de atrito, pode-se adotá-la sem ressalvas em substituição a equação Colebrook-White. Percebe-se ainda que a equação de Moody subestima o fator  $f$  para qualquer interação de velocidade e diâmetro quando a rugosidade é de 0,0001 mm. E que a equação de Sousa e Dantas Neto (2014) se apresenta sempre como a melhor, ou uma das melhores, independentemente do cenário testado para o regime de escoamento turbulento hidráulicamente liso.

**Figura 6** - Erros relativos de modelos matemáticos em comparação a equação de Von Kármán para diâmetros nominais de 16, 50, 100 e 500 mm e rugosidades absolutas de 0,0100 e 0,0001 mm



## Conclusões

Pelos índices de Willmott e de desempenho, os modelos matemáticos de Colebrook-White, Moody, Swamee-Jain, Swamee e Sousa e Dantas Neto (2014), receberam classificação excelente na estimativa do fator de atrito  $f$  em comparação a Von Kármán, para velocidades de fluxo de até  $4,00 \text{ m s}^{-1}$ , diâmetro nominal de até 500 mm e rugosidades absolutas de 0,0100 a 0,0001 mm.

Para o regime de fluxo turbulento liso a equação de Moody foi a de menor exatidão na estimativa do fator  $f$  e as equações de Colebrook-White, Swamee e Swamee-Jain foram equivalentes.

A equação de Sousa e Dantas Neto (2014) foi a de melhor performance na estimativa do fator de atrito  $f$  em comparação a equação de Von Kármán para o regime de fluxo turbulento hidraulicamente liso.



## Referências

ABDULAMEER, L. S.; DZHUMAGULOVA, N.; ALGRETAWEE, H.; ZHURAVLEVA, L.; ALSHAMMARI, M. H. Comparison Between Hazen-Williams and Darcy-Weisbach Equations To Calculate Head Loss Through Conveyancing Treated Wastewater in Kerbala City, Iraq. **Eastern-European Journal of Enterprise Technologies**, Kharkiv, v. 1, n. 1, p. 115, 2022.

ANDRADE, L.; CARVALHO, J. A. Análise da equação de Swamee-Jain para cálculo do fator de atrito. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v.5, n.3, p.554-557, 2001.

AZEVEDO NETTO, J. M.; FERNÁNDEZ, M. F. **Manual de hidráulica**. 9. ed. São Paul: Blucher, 2015. 632 p.

BRKIĆ, D. Review of explicit approximations to the Colebrook relation for flow friction. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, Amsterdã, v. 77, n. 1, p. 34-48, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2011.02.006>

FERREIRA, D. F. Sisvar: a computer statistical analysis system. Versão 5.8, **Lavras Ciência e Agrotecnologia**, 2011. Disponível em: <https://des.ufla.br/~danielff/programas/sisvar.html> Acesso em: 12 mai. 2023.

GOMES, H. P. **Engenharia de irrigação: hidráulica dos sistemas pressurizados, aspersão e gotejamento**. 3. ed. Campina Grande: Ed. UFPB, 1999. 412p.

GONÇALVES, T. S.; ORO, C. E. D.; DALLAGO, R. M.; MIGNONI, M. L. Avaliação de fator de atrito pelo método de Newton para solução da equação de Colebrook-White. **Perspectiva**, Erechim. v. 45, n. 171, p. 55-64, 2021. DOI: 10.31512/persp.v.45.n.171.2021.162.p.55-64.

HADDAD, A. Evaluation and correlation of friction head losses in smooth and rough pipes. **The Eurasia Proceedings of Science Technology Engineering and Mathematics**, Elazığ, v. 7, n. 4, p. 357-362, 2019.

JAMIL, R.; MUJEEBU, M. A. Empirical relation between Hazen-Williams and Darcy-Weisbach equations for cold and hot water flow in plastic pipes. **WATER**, Dammam, v. 108, n. 6, p. 104-114, 2019. DOI: <https://doi.org/10.14294/WATER.2019.1>

JARDIM, A. M. R. F.; SILVA, J. R. I.; SILVA, M. V.; SOUZA, L. S. B.; ARAÚJO JÚNIOR, G. N.; ALVES, H. K. M. N.; MESQUITA, M.; SOUZA, P. J. O. P.; CASTRO, A. H. Modelling the Darcy-Weisbach friction factor and the energy gradient of the lateral line. **Irrigation and Drainage**, Hoboken v. 71, n. 2, p. 320-332, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1002/ird.2658>

MELLO, C. R.; CARVALHO, J. A. Análise da equação de perda de carga de Hazen-Williams, associada aos regimes hidráulicos para tubos de PVC e polietileno de pequeno diâmetro. **Revista Brasileira de**



**Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande v. 2, n. 3, p. 247-252, 1999. DOI: <https://doi.org/10.1590/1807-1929/agriambi.v2n3p247-252>

MELO, V. G. M. L. **Perda de carga em tubos gotejadores colapsáveis para microirrigação**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas Agrícolas). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020.

PIMENTA, B. D. **Análise de formulações explícitas do coeficiente de perda de carga em condutos pressurizados**. Dissertação (Mestrado em engenharia agrícola) Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria. 2017.

PIMENTA, B. D.; ROBAINA, A. D.; PEITER, M. X.; PEREIRA, A. C.; RODRIGUES, A. S.; LOREGIAN, M. V. Desempenho e precisão de equações explícitas do coeficiente de perda de carga em regime de fluxo turbulento. *Revista Brasileira de Agricultura Irrigada*, Fortaleza, v. 12, n. 2, p. 2443, 2018. DOI: [10.7127/rbai.v12n200743](https://doi.org/10.7127/rbai.v12n200743)

PORTO, R. M. **Hidráulica Básica**. 4. ed. São Carlos: EESC-USP, 2006. 540 p.

SAMADIANFARD, S. Gene expression programming analysis of implicit Colebrook-White equation in turbulent flow friction factor calculation. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Amsterdã, v. 92, p. 48-55, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2012.06.005>

SILVA, F. O.; TOLENTINO JÚNIOR, J. B. Otimização do dimensionamento hidráulico de uma subunidade de irrigação localizada. *Irriga*, Botucatu, v. 25, n. 4, p. 697-703, 2020. DOI: <https://doi.org/10.15809/irriga.2020v25n4p697-703>

SILVA, J. G.; PEITER, M. X.; ROBAIANA, A. D.; BRUNING, J.; CHAIBEN NETO, M.; FERREIRA, L. D. Simplified Scobey formula for determining head loss in pressurized pipes. *Revista Brasileira de Agricultura Irrigada*, v. 16, p. 31-41, 2022. DOI: <https://doi.org/10.7127/rbai.v1601254>

SOUZA, J. S. C.; DANTAS NETOS, J. Equação explícita para cálculo do fator de atrito de Darcy-Weisbach em projetos de irrigação pressurizada1. *Irriga*, Botucatu, v. 19, n. 1, p. 137-148, 2014. DOI: <https://doi.org/10.15809/irriga.2014v19n1p137>

SWAMEE, P. K.; Jain, A. K. Explicit equations for pipe-flow problems. *Journal of the hydraulics division*, New York, v. 102, n. 5, p. 657-664, 1976. DOI: <https://doi.org/10.1061/JYCEAJ.0004542>

YOO, D. H.; SINGH, Vijay P. Explicit design of commercial pipes with secondary losses. *Journal of Hydro-Environment Research*, Amsterdã, v. 4, n. 1, p. 37-45, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jher.2009.12.003>